International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2013 秋季賽　國中組　初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有 100 位選手參加摔角比賽，每位選手的實力兩兩都不相同，強手恆可擊敗弱手。每位選手都恰好出賽 2 場，若贏得 2 場者均可獲獎。請問至少有多少位選手可獲獎？（三分）

【參考解法】

因實力最強的選手必定兩場比賽都獲勝而實力最弱的選手必定兩場比賽都落敗，故知至少有一位選手可獲獎。將 100 位選手依照實力由強至弱排成一列，除了實力最強的選手與最弱的選手外，安排每位選手都與左右側的選手各比賽一場，另安排實力最強與最弱的選手比賽一場，如此每位選手都出賽 2 場，且可知除了實力最強與最弱的選手之外每一位選手都恰好勝一場敗一場，故此情形僅實力最強的選手贏得 2 場而獲獎。所以至少有一位選手可獲獎。

【評分標準】

證明必有一人可獲獎，$\frac{3}{7}$；

構造恰有一人獲獎的情況，$\frac{4}{7}$。

2. 請問是否存在一個十位數的十個數碼都不相同，且任意移除六個數碼後，剩下的四個數碼在不變動其順序下所構成的四位數恆是個合數？（四分）

【參考解法】

把 5 及偶數碼以任意順序安排在末六位。此時可知移除六個數碼之後，若末六位數中有任何一個數碼沒有被移除，則所構成的四位數的末位數必為偶數或 5，即恆為合數；若這末六位數的數碼都被移除，則剩下的前四位數的數碼必是由 1、3、5、7 所構成，此時若將這四個數碼安排成 1397，則知所構成的四位數為 11 的倍數，即是個合數。故所求之十位數存在，1397024568 即為一例。

【評分標準】

說明後 6 位為 0、2、4、5、6、8，且前 4 位為合數即可，$\frac{4}{7}$；

找出此數，$\frac{3}{7}$。

3. 用記號(a, b)表示 a、b 的最大公因數。令 n 為正整數使得

$$(n, n+1) < (n, n+2) < \cdots < (n, n+35)。$$

請證明 $(n, n+35) < (n, n+36)$。（四分）

【參考解法】

因$(n, n+1)=1$，故可知$(n, n+2)\geq 2$；另一方面，因$(n, n+2)$一定可整除$(n+2)-n=2$，故知$(n, n+2)=2$。同樣地，可以推知$(n, n+k)=k$，其中$3\leq k\leq 35$。此時便可得知 n 必可被 2、3、4、⋯、35 的最小公倍數所整除，接著便可再推知 n 必可被$4\times 9=36$所整除，因此 $n+36$ 也可被 36 所整除，所以$(n, n+36)=36>35=(n, n+35)$。

【評分標準】

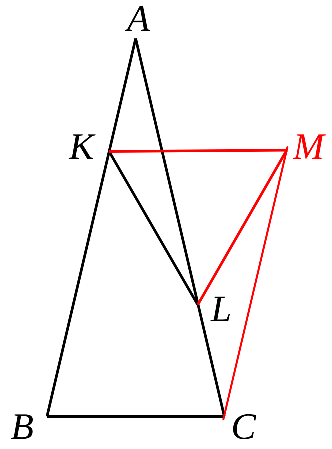
(i) 提出對於所有的質數 p 都滿足$(n, n+p)=p$，$\frac{3}{7}$；

完整證明，$\frac{4}{7}$。

(ii) 若寫出$35!\,|\,n$，$\frac{1}{7}$。

4. 令 ABC 為等腰三角形，$AB=AC$。假設點 K、點 L 分別為 AB、AC 上的點，使得 $AK=CL$ 且$\angle ALK+\angle LKB=60^\circ$，請證明 $KL=BC$。（五分）

【參考解法】



如圖，作正三角形 KLM，其中令點 M 與點 B 落在直線 AC 的異側。此時可知$\angle ALM=60^\circ-\angle ALK=\angle LKB$。

連結 CM。

因 $AK=CL$、$KL=LM$

且知$\angle AKL=180^\circ-\angle LKB=180^\circ-\angle ALM=\angle CLM$，

故知$\triangle AKL\cong\triangle CLM$，

所以 $AL=CM$ 且$\angle LAK=\angle MCL$。

由$\angle LAK=\angle MCL$可推知 $KB//MC$，

且$KB=AB-AK=AC-CL=AL=CM$，

所以 $BCMK$ 是平行四邊形，因此 $BC=KM=KL$。

5. 將西洋棋的八枚城堡(rooks)放在棋盤上不同的小方格內，使得任兩枚城堡都互不攻擊。接下來將八枚城堡都同時依照騎士(knight)移動一步的方式移動，如果二枚城堡的位置在騎士可互相攻擊的位置上，則允許這二枚城堡互換位置。請證明無論開始時這八枚城堡的位置如何，都可能使得移動後的城堡仍然都互不攻擊。(註：西洋棋騎士的一次走法是在棋盤方格內移動至橫二縱一或橫一縱二的位置；若兩枚城堡在同一行、同一列或同一個位置時，則稱它們可以互相攻擊對方。)（六分）

【參考解法】

可知此時每一行、每一列上都恰只有一個城堡。現不妨令在第 k 行的城堡落在第 y_k 列上，其中$1\leq k\leq 8$。接著將所有城堡依以下規則移動：

(i) 若$k=1$、3、5、7，則移到第$k+1$行；

(ii) 若$k=2$、4、6、8，則移到第$k-1$行；

(iii) 若$y_k=1$、2、5、6，則移到第y_k+2列；

(iv) 若 $y_k = 3$、4、7、8，則移到第 $y_k - 2$ 列。

可發現此即為將城堡都同時依照騎士移動一步的方式移動，且每一行、每一列上仍恰只有一個城堡，它們仍然都互不攻擊。