

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2013 秋季賽 高中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 平面上有一張黑白相間塗色的 8×8 方格表，小丁 任意選擇在其中一個小方格內部的一個點。每一回合，小王 在此方格表內任意畫一個多邊形(可以是凹的，但不可以自交)，小丁 接著會誠實告知小王 所選的點在此多邊形的內部或外部。為保證能確定知道小丁 所選的點在白色或黑色的小方格內，請問小王 至少要進行多少回合？(五分)
2. 請找出使得以下敘述恆為真的所有正整數 n ：
對於任意二個 n 階的多項式 $P(x)$ 與 $Q(x)$ ，存在單項式 ax^k 與 bx^l ，其中 a 與 b 為實數、 k 與 l 為正整數且 $0 \leq k, l \leq n$ ，使得 $P(x) + ax^k$ 與 $Q(x) + bx^l$ 的圖形沒有交點。(六分)
3. 令等邊三角形 ABC 之中心為 O 點。一條通過點 C 的直線交 $\triangle AOB$ 的外接圓於 D 、 E 兩點。請證明點 A 、 O 與線段 BD 、 BE 的中點四點共圓。(六分)
4. 請問每個整數是否可表示為有限多個不同整數的立方之和？(七分)
5. 是否存在二個值域為整數之函數 f 、 g 使得對於任意整數 x 都滿足：
(a) $f(f(x)) = x$ 、 $g(g(x)) = x$ 、 $f(g(x)) > x$ 、 $g(f(x)) > x$ ？(三分)
(b) $f(f(x)) < x$ 、 $g(g(x)) < x$ 、 $f(g(x)) > x$ 、 $g(f(x)) > x$ (五分)
6. 在桌上有 11 堆石子，每堆各 10 枚。小皮 與 小貝 進行以下遊戲：他們輪流從中取石子，規定小皮 每次只能從同一堆中取 1、2 或 3 枚石子，而小貝 只能從 1、2 或 3 堆中各取一枚。小皮 先拿，拿到最後一枚石子者勝。無論對手如何應對，請問誰有必勝的策略？(九分)
7. 平面上有一封閉的多邊形，它的每一個頂點都恰只有兩條邊在此相交，且每一條邊恰有一個內點為這條邊與另一條邊的交點。請問是否可能每一條邊都被這樣的交點平分？(十四分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2013 秋季賽 高中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 平面上有一張黑白相間塗色的 8×8 方格表，小丁 任意選擇在其中一個小方格內部的一個點。每一回合，小王 在此方格表內任意畫一個多邊形(可以是凹的，但不可以自交)，小丁 接著會誠實告知小王 所選的點在此多邊形的內部或外部。為保證能確定知道小丁 所選的點在白色或黑色的小方格內，請問小王 至少要進行多少回合？(五分)
2. 請找出使得以下敘述恆為真的所有正整數 n ：
對於任意二個 n 階的多項式 $P(x)$ 與 $Q(x)$ ，存在單項式 ax^k 與 bx^l ，其中 a 與 b 為實數、 k 與 l 為正整數且 $0 \leq k, l \leq n$ ，使得 $P(x) + ax^k$ 與 $Q(x) + bx^l$ 的圖形沒有交點。(六分)
3. 令等邊三角形 ABC 之中心為 O 點。一條通過點 C 的直線交 $\triangle AOB$ 的外接圓於 D 、 E 兩點。請證明點 A 、 O 與線段 BD 、 BE 的中點四點共圓。(六分)
4. 請問每個整數是否可表示為有限多個不同整數的立方之和？(七分)
5. 是否存在二個值域為整數之函數 f 、 g 使得對於任意整數 x 都滿足：
(a) $f(f(x)) = x$ 、 $g(g(x)) = x$ 、 $f(g(x)) > x$ 、 $g(f(x)) > x$ ？(三分)
(b) $f(f(x)) < x$ 、 $g(g(x)) < x$ 、 $f(g(x)) > x$ 、 $g(f(x)) > x$ (五分)
6. 在桌上有 11 堆石子，每堆各 10 枚。小皮 與 小貝 進行以下遊戲：他們輪流從中取石子，規定小皮 每次只能從同一堆中取 1、2 或 3 枚石子，而小貝 只能從 1、2 或 3 堆中各取一枚。小皮 先拿，拿到最後一枚石子者勝。無論對手如何應對，請問誰有必勝的策略？(九分)
7. 平面上有一封閉的多邊形，它的每一個頂點都恰只有兩條邊在此相交，且每一條邊恰有一個內點為這條邊與另一條邊的交點。請問是否可能每一條邊都被這樣的交點平分？(十四分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》