

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2013 秋季賽 高中組 初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 請問是否存在一個十位數的十個數碼都不相同，且任意移除六個數碼後，剩下的四個數碼在不變動其順序下所構成的四位數恆是個合數？(三分)
2. $\triangle ABC$ 為三角形，令點 X 與點 A 在直線 BC 的同側，點 Y 與點 B 在直線 AC 的異側，點 Z 與點 C 在直線 AB 的異側，使得 $\triangle XBC$ 、 $\triangle YAC$ 、 $\triangle ZBA$ 兩兩相似，上述三角形的頂點順序為其相似對應關係，即當 $\triangle XBC \sim \triangle YAC$ 時，點 X 對應點 Y 、點 B 對應點 A 、點 C 對應點 C 。請證明 $AYXZ$ 是個平行四邊形。(四分)
3. 用記號 $[a, b]$ 表示 a 、 b 的最小公倍數。令 n 為正整數使得
$$[n, n+1] > [n, n+2] > \cdots > [n, n+35]。$$
請證明 $[n, n+35] > [n, n+36]$ 。(四分)
4. 將西洋棋的八枚城堡(rooks)放在棋盤上不同的小方格內，使得任兩枚城堡都互不攻擊。接下來將八枚城堡都同時依照騎士(knight)移動一步的方式移動，如果二枚城堡的位置在騎士可互相攻擊的位置上，則允許這二枚城堡互換位置。請證明無論開始時這八枚城堡的位置如何，都可能使得移動後的城堡仍然都互不攻擊。(註：西洋棋騎士的一次走法是在棋盤方格內移動至橫二縱一或橫一縱二的位置；若兩枚城堡在同一行、同一列或同一個位置時，則稱它們可以互相攻擊對方。)(五分)
5. 一艘太空船降落在一個小行星的表面上，已知這座小行星可能是一個球體或是一個正立方體。太空船放下一艘探測車沿著小行星的表面行走，探測車不斷地傳送它的即時所在位置給留守在降落地點的太空船，直到探測車抵達降落地點關於小行星中心對稱的位置為止，因此太空船可以知道探測車的移動軌跡。請問是否可能發生探測車傳回的這些資料，不足以讓太空船判定這座小行星是一個球體或是一個正立方體？(六分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》