International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2013 秋季賽　高中組　初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 請問是否存在一個十位數的十個數碼都不相同，且任意移除六個數碼後，剩下的四個數碼在不變動其順序下所構成的四位數恆是個合數？(三分）

【參考解法】

把 5 及偶數碼以任意順序安排在末六位。此時可知移除六個數碼之後，若末六位數中有任何一個數碼沒有被移除，則所構成的四位數的末位數必為偶數或 5，即恆為合數；若這末六位數的數碼都被移除，則剩下的前四位數的數碼必是由 1、3、5、7 所構成，此時若將這四個數碼安排成 1397，則知所構成的四位數為 11 的倍數，即是個合數。故所求之十位數存在，1397024568 即為一例。

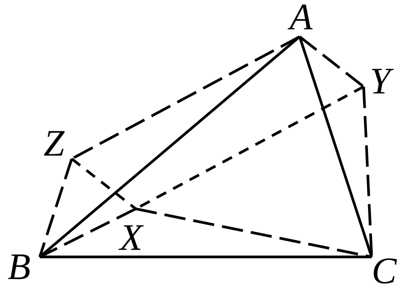
【評分標準】

說明後 6 位為 0、2、4、5、6、8，且前 4 位為合數即可，$\frac{4}{7}$；

找出此數，$\frac{3}{7}$。

2. $\triangle ABC$ 為三角形，令點 X 與點 A 在直線 BC 的同側，點 Y 與點 B 在直線 AC 的異側，點 Z 與點 C 在直線 AB 的異側，使得$\triangle XBC$、$\triangle YAC$、$\triangle ZBA$ 兩兩相似，上述三角形的頂點順序為其相似對應關係，即當$\triangle XBC\sim\triangle YAC$ 時，點 X 對應點 Y、點 B 對應點 A、點 C 對應點 C。請證明 $AYXZ$ 是個平行四邊形。(四分）

【參考解法】



因$\triangle ZBA\sim\triangle XBC$，

故知$\dfrac{ZB}{XB}=\dfrac{AB}{CB}$且$\angle ZBA=\angle XBC$，所以可推知

$\angle ZBX=\angle ZBA+\angle ABX=\angle XBC+\angle ABX=\angle ABC$

，因此$\triangle ZBX\sim\triangle ABC$；

同樣地，可得知$\triangle YXC\sim\triangle ABC$，

故有$\dfrac{XZ}{ZB}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CY}{XY}$。

另一方面，因$\triangle ZBA\sim\triangle YAC$，故也可依上述推理方式推得$\dfrac{YA}{ZB}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CY}{ZA}$。

因此可得知 $XZ=YA$ 及 $XY=ZA$，所以 $AYXZ$ 是平行四邊形。

3. 用記號 $[a, b]$ 表示 a、b 的最小公倍數。令 n 為正整數使得

$$[n, n+1] > [n, n+2] > \cdots > [n, n+35]。$$

請證明 $[n, n+35] > [n, n+36]$。（四分）

【參考解法】

用記號(a, b)表示 a、b 的最大公因數，則可得知$(a, b)[a, b]=ab$。

因$(n, n+1)=1$，故可知$[n, n+1]=n(n+1)$；

若$(n, n+2)=1$，則$[n, n+2]=n(n+2)> n(n+1)= [n, n+1]$，矛盾。因此知$(n, n+2)\geq 2$；另一方面，因$(n, n+2)$一定可整除$(n+2)-n=2$，故知$(n, n+2)=2$ 且由此知$[n, n+2]=\dfrac{n(n+2)}{2}$；

若$(n, n+3)\leq 2$，則$[n, n+3] \geq \dfrac{n(n+3)}{2} > \dfrac{n(n+2)}{2}=[n, n+2]$，矛盾。因此利用與上述相同推理方式可推知$(n, n+3)=3$；

同樣地，可以推知$(n, n+k)= k$，其中 $4\leq k\leq 35$。此時便可得知 n 必可被 2、3、4、…、35 的最小公倍數所整除，於是可再推知 n 必可被 $4\times 9=36$ 所整除，故 $n+36$ 也可被 36 整除，所以$(n, n+36)=36$ 且由此知$[n, n+36]=\dfrac{n(n+36)}{36}<\dfrac{n(n+35)}{35}=[n, n+35]$。

【評分標準】

(i) 得到國中組初級卷第 3 題的結論，$\dfrac{1}{7}$；

提出對於所有的質數 p 都滿足$[n, n+p]=p$，$\dfrac{2}{7}$；

完整證明，$\dfrac{4}{7}$。

(ii) 若寫出$35!|n$，$\dfrac{1}{7}$。

4. 將西洋棋的八枚城堡(rooks)放在棋盤上不同的小方格內，使得任兩枚城堡都互不攻擊。接下來將八枚城堡都同時依照騎士(knight)移動一步的方式移動，如果二枚城堡的位置在騎士可互相攻擊的位置上，則允許這二枚城堡互換位置。請證明無論開始時這八枚城堡的位置如何，都可能使得移動後的城堡仍然都互不攻擊。(註：西洋棋騎士的一次走法是在棋盤方格內移動至橫二縱一或橫一縱二的位置；若兩枚城堡在同一行、同一列或同一個位置時，則稱它們可以互相攻擊對方。)（五分）

【參考解法】

可知此時每一行、每一列上都恰只有一個城堡。現不妨令在第 k 行的城堡落在第 y_k 列上，其中$1\leq k\leq 8$。接著將所有城堡依以下規則移動：

(i) 若 $k=1$、3、5、7，則移到第 $k+1$行；

(ii) 若 $k=2$、4、6、8，則移到第 $k-1$行；

(iii) 若 $y_k=1$、2、5、6，則移到第 y_k+2 列；

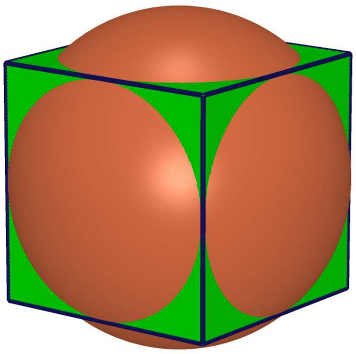
(iv) 若 $y_k = 3$、4、7、8，則移到第 $y_k - 2$ 列。

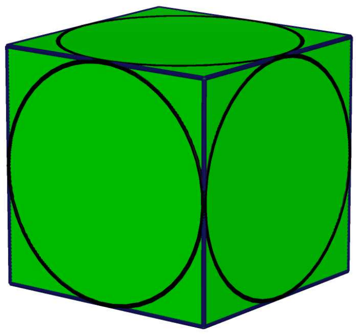
可發現此即為將城堡都同時依照騎士移動一步的方式移動，且每一行、每一列上仍恰只有一個城堡，它們仍然都互不攻擊。

5. 一艘太空船降落在一個小行星的表面上，已知這座小行星可能是一個球體或是一個正立方體。太空船放下一艘探測車沿著小行星的表面行走，探測車不斷地傳送它的即時所在位置給留守在降落地點的太空船，直到探測車抵達降落地點關於小行星中心對稱的位置為止，因此太空船可以知道探測車的移動軌跡。請問是否可能發生探測車傳回的這些資料，不足以讓太空船判定這座小行星是一個球體或是一個正立方體？（六分）

【參考解法】

假設有一個球體的表面與一個正立方體的六個表面都相交，且恰與正立方體的每一個面相交於該面的內切圓(因每一個正六面體邊的中點至正六面體中心的距離都相等，以此距離為半徑所作的球，將會與正六面體在其每一邊的中點相切，這種球稱為正六面體的中點球（MIDSPHERE）)。可知這正立方體每一個面上的內切圓在該面上的每一條邊上的中點上都恰與另一個圓相切。





若這艘太空船恰降落的點在這六個圓的任一個圓周上，則探測車之目的地在該面之對面上的圓周上；而此時若探測車沿著圓周移動至目的地，則因探測車的路徑同時可為正立方體的表面與其中點球的表面，故傳回的這些資料，不足以讓太空船判定這座小行星是一個球體或是一個正立方體。