

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

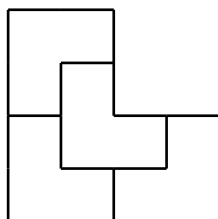
International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2015 秋季賽 國中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 一片非矩形多方塊稱之為「神奇的」，如果用數片此多方塊可以拼成放大它本身的圖形。下圖是指出 V 型三方塊是「神奇的」之例子。



- (a) 請找出一片「神奇的」四方塊；(2分)
(b) 對於 $n > 4$ ，請找出存在「神奇的」 n 方塊的所有 n 。(3分)
2. 從 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 中刪除 k 個數。在剩下的數中，是否必定存在有 k 個相異的正整數使得它們的和為 100，如果
(a) $k=9$ ？(2分)
(b) $k=8$ ？(4分)
3. 請證明任意三角形的兩條中線長度之和
(a) 不大於此三角形周長的 $\frac{3}{4}$ ；(3分)
(b) 不小於此三角形周長的 $\frac{3}{8}$ 。(5分)
4. 一個 9×9 的方格表是由 180 根火柴棒所構造出來的。A 與 B 兩個人輪流每次從中移除 1 根火柴棒，誰能夠在操作後使得圖中沒有剩下任何一個 1×1 的正方形者獲勝。若由 A 先取，請問誰有必勝的策略？(8分)
5. 在三角形 ABC 中，三條中線 AD 、 BE 、 CF 交於點 G 。分別令點 P 、 Q 、 R 、 S 為三角形 GDE 、 GCE 、 GDF 、 GBF 的外心。請證明 P 、 Q 、 R 、 S 、 G 五點共圓。(8分)
6. 在黑板上寫下幾個相異實數。小平想要造出一個表達式用以恰好顯示這幾個數值。他可以在表達式中任意使用實數、括號以及運算符號 $+$ 、 $-$ 、 \times ，他同時也可以使用特殊符號 \pm 。當在計算表達式的值時，在遇到所有 \pm 時，都必須計算 $+$ 與 $-$ 號的所有組合情形。例如，表達式 5 ± 1 所得出的值為 $\{4, 6\}$ 而 $(2 \pm 0.5) \pm 0.5$ 所得出的值為 $\{1, 2, 3\}$ 。請問小平能否作出一個表達式，
(a) 如果黑板上的數為 1、2、4？(3分)
(b) 如果黑板上的數為任意 100 的相異實數？(7分)
7. 聖誕老人有 n 種糖果，每種 k 顆。他隨意將這些糖裝入 k 個袋子，每個袋子內各有 n 顆糖，然後將分給 k 位小孩，每人一袋。每位小孩都確知他們自己袋內的糖果種類，然後進行交換的動作。任兩位小孩每次可以互相換入他袋子內沒有的種類之一顆糖。經過一系列的交換後，請問是否可能使得每位小朋友袋內的都有不同種類的糖各一顆？(10分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》