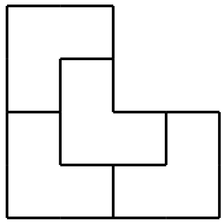
International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2015 秋季賽　國中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

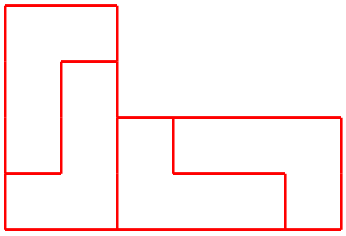
1. 一片非矩形多方塊稱之為「神奇的」，如果用數片此多方塊可以拼成放大它本身的圖形。下圖是指出 V 型三方塊是「神奇的」之例子。



   (a)　請找出一片「神奇的」四方塊；(2 分)
   (b)　對於 $n>4$，請找出存在「神奇的」n 方塊的所有 n。(3 分)

【參考解法】

(a) 由下圖可知 L 型四方塊為一「神奇的」四方塊：



(b) 對於所有的 L 型 n 方塊來說，只要二片 L 型 n 方塊都可拼成一個 $2\times n$ 的矩形，而利用 $2n$ 個 $2\times n$ 的矩形可以拼成一個 $2n\times 2n$ 的正方形，最後再利用 n 個這樣的正方形就可拼出一個放大的 L 型 n 方塊。

【評分標準】

(a)

- 找出「神奇的」四方塊，$\frac{3}{7}$
- 繪出將此四方塊放大的拼法，$\frac{4}{7}$

(b)

- 僅找出幾個 n 值並繪出拼法，$\frac{1}{7}$

2. 從 $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ 中刪除 k 個數。在剩下的數中，是否必定存在有 k 個相異的正整數使得它們的和為 100，如果
   (a)　$k=9$？（2 分）
   (b)　$k=8$？（4 分）

【參考解法】

(a) 若刪除的數為 1、2、3、4、5、6、7、8、9，則剩下的數中，最小的九個數之和為 $10+11+12+13+14+15+16+17+18=126$，即不可能找到九個數之和為 100，故答案為否。

(b) 在(1, 24)、(2, 23)、(3, 22)、(4, 21)、(5, 20)、(6, 19)、(7, 18)、(8, 17)、(9, 16)、(10, 15)、(11, 14)、(12, 13)這 12 組數對中，刪除的八個數至多從其中八組中取出，即至少有四組數對裡的數都不會被刪除，而這四組數對共八個數之和恰為 100，故答案為必存在 8 個相異的正整數使得它們的和為 100。

【評分標準】

(a)

- 舉出反例並驗證，$\frac{7}{7}$

(b)

- 找出可行的取 8 個數的方法，但未驗證，$\frac{5}{7}$
- 僅說明 8 個可能存在，但未舉例或未找出如何取 8 數的方法，$\frac{2}{7}$
- 在找可行的取 8 個數的方法中，若說明有誤或不清楚，至多 $\frac{4}{7}$

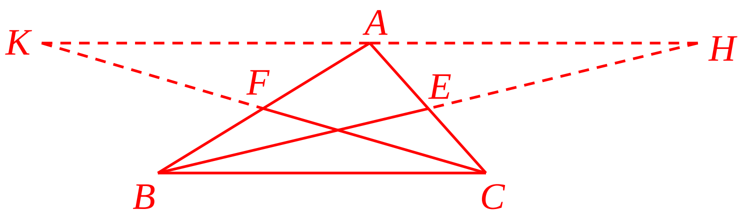
3. 請證明任意三角形的兩條中線長度之和

(a) 不大於此三角形周長的 $\frac{3}{4}$；(3 分)

(b) 不小於此三角形周長的 $\frac{3}{8}$。(5 分)

【參考解法】

(a) 若 BE、CF 為三角形 ABC 中較長的兩條中線，則延長 BE 至點 H、CF 至點 K 使得 $BE = EH$、$CF = FK$。連接 AK、AH，如圖所示。



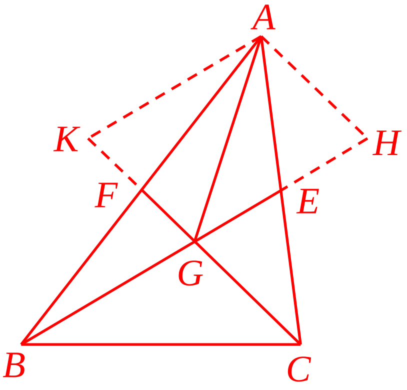
此時觀察三角形 BAH 與 CAK，由三角不等式可知

$$AB + BC = AB + AH > BH = 2BE \text{、} AB + BC = AC + AK > CK = 2CF$$

故可得

$$\begin{aligned} BE + CF &< \frac{1}{2}(AB + AC + 2BC) \\ &= \frac{1}{2}(AB + AC + BC) + \frac{1}{4}BC + \frac{1}{4}BC \\ &< \frac{1}{2}(AB + AC + BC) + \frac{1}{4}(AB + AC) + \frac{1}{4}BC \\ &= \frac{3}{4}(AB + AC + BC) \end{aligned}$$

(b) 若 BE、CF 為三角形 ABC 中較短的兩條中線而點 G 為三中線的交點，則延長 BE 至點 H、CF 至點 K 使得 $GE=EH$ 、$GF=FK$ 。連接 AK、AH，如圖所示。



此時觀察三角形 GBC、BAH 與 CAK，由三角不等式可知

$BG+CG>BC$ 、 $2BG+CG=BH+AH>AB$ 、 $2CG+BG=CK+AK>AC$

故可得

$$AB+AC+BC<4(BG+CG)=4\times\frac{2}{3}(BE+CF)$$

$$BE+CF>\frac{3}{8}(AB+AC+BC)$$

【評分標準】

(a) 僅舉例，$\frac{0}{7}$

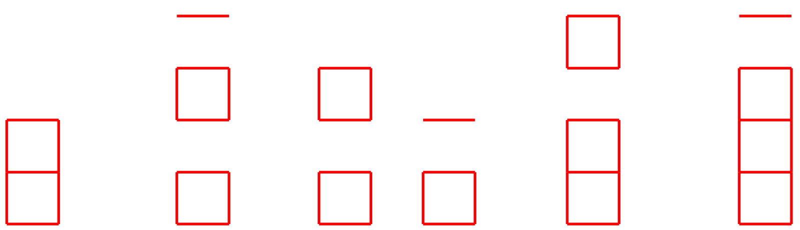
(b) 僅證出不小於 $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$ ，$\frac{2}{7}$

● 僅以極端的狀況來觀察，$\frac{1}{7}$

4. 一個 9×9 的方格表是由 180 根火柴棒所構造出來的。A 與 B 兩個人輪流每次從中移除 1 根火柴棒，誰能夠在操作後使得圖中沒有剩下任何一個 1×1 的正方形者獲勝。若由 A 先取，請問誰有必勝的策略？（8 分）

【參考解法】

以下驗證依此規則，除了 $n=1$ 的情況以外，其餘所有 $n\times n$ 的情況，B 都有必勝策略。除了最後還剩下 4 個小正方形時以外，B 可任意取火柴棒，但不會在操作一次中破壞兩個小正方形，而最後輪到 B 取火柴棒的關鍵時刻必是至多剩下三個完整無缺的小正方形。由開始時共有偶數根火柴棒可觀察出輪到 B 時必是僅剩下奇數根火柴棒。若是輪到 B 時恰僅有 1 個完整的小正方形，B 可直接破壞這一個小正方形而獲勝；而若是輪到 B 時有 2 或 3 個完整的小正方形時，則可歸納成以下五個狀況：



狀況一　狀況二　狀況三　狀況四　狀況五

如果一根火柴棒已不再是一個完整的小正方形之邊，則將這根火柴棒稱為破的火柴棒。而若 A 取走的是破的火柴棒，則 B 也可以跟著取走破的火柴棒而維持破的火柴棒數目之奇偶性，因此可判斷知破的火柴棒之數目其實是無關緊要的，重點是觀察奇偶性，也就是說在這些狀況中，只需要考慮至多有一根破的火柴棒。

在狀況一中，B 只要取走同時破壞兩個小正方形的火柴棒即可獲勝；

在狀況二中，B 可先取走破的火柴棒，接著 A 必破壞其中一個小正方形，最後 B 再破壞另一個小正方形而可獲勝；

在狀況三中，B 可先破壞其中一個小正方形後共有四根破的火柴棒，接下來由奇偶性知可無視這四根破的火柴棒而成為狀況二中 B 已取走破的火柴棒後的情形，因此 B 必勝；

在狀況四中，B 可先破壞兩個相連接的小正方形中的其中一個小正方形後會有二根破的火柴棒，接下來同樣由奇偶性知可無視這二根破的火柴棒而成為狀況二中 B 已取走破的火柴棒後的情形，因此 B 必勝；

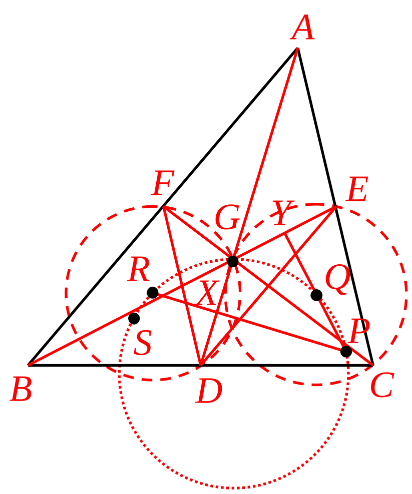
在狀況五中，B 可先取走破的火柴棒。若接著 A 取走同時破壞兩個小正方形的火柴棒，則 B 只要取走破壞最後一個小正方形的火柴棒即獲勝；若 A 取走破壞兩旁其中一個小正方形的火柴棒，則 B 只要取走同時破壞兩個小正方形的火柴棒即獲勝；若 A 取走破壞中間小正方形的火柴棒，則此時會有一根破的火柴棒，接著 B 再取走破的火柴棒後同樣成為狀況二中 B 已取走破的火柴棒後的情形，因此 B 必勝。

【評分標準】

- 若提出 B 獲勝的策略會有例外的情況，至多 $\frac{3}{7}$
- 將最後會形成的狀況舉出，$\frac{3}{7}$；若不完整，至多 $\frac{2}{7}$
- 討論各狀況發生時，B 所採取的策略，$\frac{4}{7}$

5. 在三角形 ABC 中，三條中線 AD、BE、CF 交於點 G。分別令點 P、Q、R、S 為三角形 GDE、GCE、GDF、GBF 的外心。請證明 P、Q、R、S、G 五點共圓。(8 分)

【參考解法】



作直線 PR、PQ 且連接 DF、DE，如圖所示。

因點 P 為三角形 GDE 的外心、點 R 為三角形 GDF 的外心可得知 PR 為 GD 的中垂線，並令 PR 與 GD 交於點 X；再由點 P 為三角形 GDE 的外心、點 Q 為三角形 GCE 的外心可得知 PQ 為 GD 的中垂線，並令直線 PQ 與 GE 交於點 Y；此時即可得知 $GXPY$ 是一個圓內接四邊形，因此 $\angle QPR + \angle EGD = 180°$。

因 D、F 分別為 BC、AB 的中點，故可得知 DF 與

CE 平行，因此知 $\angle GFD=\angle GCE$；再因點 R、Q 分別為三角形 GDF、GCE 的外心，$\angle GFD=\frac{1}{2}\angle GRD$、$\angle GCE=\frac{1}{2}\angle GQE$，即知 $\angle GRD=\angle GQE$，再由 $GQ=QE$、$RG=RD$ 可推得 $\angle DGR=\angle EGQ$，故 $\angle QGR=\angle DGR+\angle DGQ=\angle EGQ+\angle DGQ=\angle EGD$，即有 $\angle QPR+\angle QGR=180°$，因此知點 Q 在三角形 GRP 的外接圓上。同樣地，依類似方法也可證出點 S 在三角形 GRP 的外接圓上，故 P、Q、R、S、G 五點共圓。

【評分標準】

- 得知 $\angle QPR+\angle EGD=180°$，$\frac{2}{7}$
- 得知 $\angle GRD=\angle GQE$，$\frac{2}{7}$
- 得知點 Q 在三角形 GRP 的外接圓上，$\frac{2}{7}$
- 說明點 S 在三角形 GRP 的外接圓上，$\frac{1}{7}$

6. 在黑板上寫下幾個相異實數。小平想要造出一個表達式用以恰好顯示這幾個數值。他可以在表達式中任意使用實數、括號以及運算符號＋、－、×，他同時也可以使用特殊符號±。當在計算表達式的值時，在遇到所有±時，都必須計算＋與－號的所有組合情形。例如，表達式 5 ± 1 所得出的值為 $\{4,6\}$ 而 $(2\pm0.5)\pm0.5$ 所得出的值為 $\{1,2,3\}$。請問小平能否作出一個表達式，
   (a) 如果黑板上的數為 1、2、4？（3 分）
   (b) 如果黑板上的數為任意 100 個的相異實數？（7 分）

【參考解法】

(a) 以下為滿足題意的表達式：

- $(1.5\pm0.5)\times(1.5\pm0.5)$：皆取＋號時，可得 4；皆取－號時，可得 1；取一個＋號與一個－號時，可得 2；
- $(1\pm0.5)\times(1\pm1)+1$：皆取＋號時，可得 4；(1 ± 1) 取－號時，可得 1；(1 ± 1) 取＋號與 (1 ± 0.5) 取－號時，可得 2；
- $(0.5\pm1.5)\times(0.5\pm0.5)+2$：皆取＋號時，可得 4；$(0.5\pm0.5)$ 取－號時，可得 2；(0.5 ± 0.5) 取＋號與 (0.5 ± 1.5) 取－號時，可得 1；
- $2\times(\frac{3\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{4})\times(\frac{3\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{4})$：皆取＋號時，可得 4；皆取－號時，可得 1；取一個＋號與一個－號時，可得 2。

(b) 對於有 n 個相異實數時，對 n 利用數學歸納法驗證。可知 $n=1$ 時恆成立。假設此結果在 $n\geq1$ 時成立，則考慮 a_1、a_2、…、a_{n+1} 這 $n+1$ 個實數。由假設可得知當僅有 a_1、a_2、…、a_n 這 n 個實數時，表達式 $E(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 可恰表達出這 n 個實數。現觀察表達式 $a_{n+1}+(0.5\pm0.5)\times E(a_1-a_{n+1},a_2-a_{n+1},\cdots,a_n-a_{n+1})$，若取－號時，此表達式之值為 a_{n+1}；若取＋號時，則恰可表達出 a_1、a_2、…、

a_n 這 n 個實數。故由數學歸納法知對所有的 n 都成立，即任意 100 個的相異實數也成立。

【評分標準】

(a) 若表達式的值有 1、2、4 以外的取值，$\frac{0}{7}$

(b) 僅構造出正確的表達式而未驗證恰可表達所有的數，$\frac{4}{7}$

7. 聖誕老人有 n 種糖果，每種 k 顆。他隨意將這些糖裝入 k 個袋子，每個袋子內各有 n 顆糖，然後將分給 k 位小孩，每人一袋。每位小孩都確知他們自己袋內的糖果種類，然後進行交換的動作。任兩位小孩每次可以互相換入他袋子內沒有的種類之一顆糖。經過一系列的交換後，請問是否可能使得每位小朋友袋內的都有不同種類的糖各一顆？（10 分）

【參考解法】

現考慮一個 $k\times n$ 的矩陣，其中每一列代表每一個小孩子所得到的袋子、每一行代表每一種糖果，則第 i 列第 j 行即為第 i 個小孩所擁有的第 j 種糖果之數目。可知每一列上的數之總和為 n、每一行上的數之總和為 k，而最後希望可以得到一個有 kn 個 1 的矩陣。現定義矩陣的「測度」即為此矩陣內 1 的個數，且再定義每一列的「指標數」為該列內 0 的個數，故可得知若某列的指標數為 0，則該列內共有 n 個 1。接著可透過交換列的順序使得每一列的指標數為逐漸遞增的情況，而若最後沒有任何一列的指標數為正，即可得知此時矩陣的測度已到達最大值 kn 且矩陣就是所要求的情況。若矩陣的測度小於 kn，則至少有一列的指標數為正，此時若令最小的正指標數這一列所代表的是小孩 P，且不妨假設他沒有第一種的糖果，則至少會有另一位小孩 B 擁有至少 2 顆第一種的糖果。因小孩 B 這一列的指標數不小於小孩 P 這一列的指標數，故可判斷出小孩 B 這一列上至少有一個 0 所在的行與小孩 P 這一列相交的數不為 0，可令這一行為第二種糖果，且此時可安排一次交換使得小孩 B 從小孩 P 得到一顆第二種糖果而小孩 P 從小孩 B 得到一顆第一種糖果，這樣就可使這兩列都各自新增一個 1，即使小孩 P 原先的第二種糖果也只有一顆，但仍可使整個矩陣的測度增加。因矩陣的測度有上限，故一定可以透過這樣的交換而使得矩陣最後的測度變為 kn。

【評分標準】

- 提出可行的交換方式，$\frac{2}{7}$
- 說明一定可以達成的理由，$\frac{5}{7}$

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》