

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2015 秋季賽 高中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 一個有 37 個正整數的等比數列，它的首項與末項互質。請證明此數列中的第 19 項是某個整數的 18 次方。(3 分)
2. 將一個 10×10 的棋盤劃分為 20 個面積相等的子棋盤，這些子棋盤互相鄰接在一起的共同邊總共有 80 單位正方形邊長。請證明所有這 20 個子棋盤都互相全等。(6 分)
3. 一個非常數多項式之係數都是絕對值不大於 2015 的整數。請證明此多項式的每一個正根都大於 $\frac{1}{2016}$ 。(6 分)
4. 延長一個內接於圓的四邊形之兩雙對邊，令它們分別交於點 P 、 Q 。若此四邊形的兩對角線之中點分別為點 M 、 N ，請證明 $\angle PMQ + \angle PNQ = 180^\circ$ 。(7 分)
5. 在黑板上寫下幾個相異實數。小平想要造出一個表達式用以恰好顯示這幾個數值。他可以在表達式中任意使用實數、括號以及運算符號 $+$ 、 $-$ 、 \times ，他同時也可以使用特殊符號 \pm 。當在計算表達式的值時，在遇到所有 \pm 時，都必須計算 $+$ 與 $-$ 號的所有組合情形。例如，表達式 5 ± 1 所得出的值為 $\{4, 6\}$ 而 $(2 \pm 0.5) \pm 0.5$ 所得出的值為 $\{1, 2, 3\}$ 。請問小平能否作出一個表達式，
 - (a) 如果黑板上的數為 1、2、4？(2 分)
 - (b) 如果黑板上的數為任意 100 的相異實數？(6 分)
6. 小貝有一個直徑為 20 cm 的球。利用一把長刀，小貝進行了兩兩互相垂直的三次切割，每次都切 h cm 深，每次都在切面上產生了一條高度為 h cm 的圓弧。請問是否必定會將此圓切為二片或二片以上，如果
 - (a) $h = 17$ cm？(6 分)
 - (b) $h = 18$ cm？(6 分)
7. 有 n 位身高都互不相同的小朋友排成一列。每次操作都先將此列的小朋友分為最少的群體，使得每個群體內的小朋友之身高都是漸升的順序，這些群體可能只有一位小朋友。接下來將每個群體的順序倒轉，使它們的身高變為漸減的。請證明經過 $n-1$ 次的操作後，保證可將所有小朋友排成身高漸減的順序。(12 分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》