International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2015 秋季賽　高中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 一個有 37 個正整數的等比數列，它的首項與末項互質。請證明此數列中的第 19 項是某個整數的 18 次方。(3 分)

【參考解法】

不妨令此等比數列的第 k 項為 a_k，其中 $1 \le k \le 37$，其公比為 $\frac{p}{q}$，其中 p、q 為互質的正整數。現因 $a_{37} = a_1 \times (\frac{p}{q})^{36}$ 為正整數，故可判斷出 $a_1 q^{-36}$ 為正整數 b，此即有 $a_1 = bq^{36}$、$a_{37} = bp^{36}$。再因 a_1 與 a_{37} 互質，故可得知 $b = 1$，即 $a_1 = q^{36}$，所以可得 $a_{19} = a_1 \times (\frac{p}{q})^{18} = (pq)^{18}$。

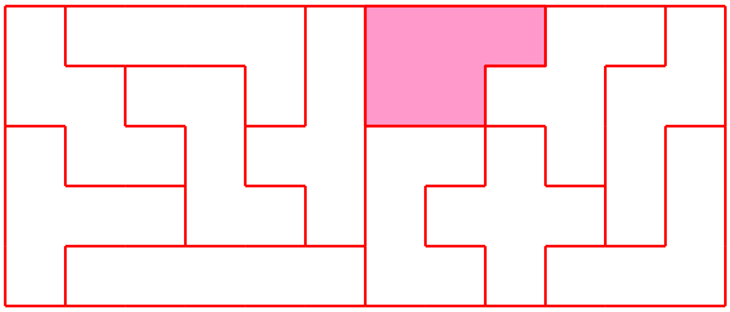
【評分標準】

- 指出若公比為 $\frac{p}{q}$，其中 $(p, q) = 1$ 時，$a_1 = bq^{36}$，$\frac{3}{7}$
- 驗證 $b = 1$，$\frac{1}{7}$
- 說明 $a_{19} = (pq)^{18}$，$\frac{3}{7}$
- 若取 $a_1 = 1$ 而證出，$\frac{1}{7}$
- 若取公比為 $\frac{1}{m}$ 而證出，其中 m 為正整數，$\frac{2}{7}$

2. 將一個 10×10 的棋盤劃分為 20 個面積相等的子棋盤，這些子棋盤互相鄰接在一起的共同邊總共有 80 單位正方形邊長。請證明所有這 20 個子棋盤都互相全等。　　(6 分)

【參考解法】

可知每一個子棋盤的面積為 $10 \times 10 \div 20 = 5$ 平方單位，且可觀察出棋盤邊上的每一條單位正方形的線段都恰落在其中一個子棋盤的邊上，而內部每一條劃分出子棋盤的單位正方形的線段都恰落在其中二個子棋盤的邊上，因此可推知每一個子棋盤的邊長為 $(40 + 2 \times 80) \div 20 = 10$ 單位。已知共有十二種五方塊，但其中僅有一種的邊長為 10 單位，如下圖中塗上陰影的五方塊，其餘的五方塊周長皆為 12 單位，而每二個這樣的五方塊可拼成一個 2×5 的矩形，故利用二十個這樣的五方塊必可拼成 10×10 的矩形。因此這 20 個子棋盤的形狀都是形如這樣子的五方塊，即都互相全等。



【評分標準】

- 說明每一個子棋盤的面積為 5 平方單位，$\frac{1}{7}$
- 說明每一個子棋盤的周長為 10 單位，$\frac{1}{7}$
- 觀察出僅 P 型五方塊的周長為 10 單位，$\frac{3}{7}$
- 說明 P 型五方塊可拼成10×10的矩形，$\frac{2}{7}$

3. 一個非常數多項式之係數都是絕對值不大於 2015 的整數。請證明此多項式的每一個正根都大於$\frac{1}{2016}$。（6 分）

【參考解法】

可令此多項式為$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，其中$n\geq 1$且因可不考慮根為 0 的情況，故假設$a_n\neq 0$。則對於$0<x\leq\frac{1}{2016}$，可得

$$\begin{aligned}|P(x)|&\geq|a_n|-|P(x)-a_n|\\&\geq 1-2015(x^n+x^{n-1}+\cdots+x)\\&=1-\frac{2015\,(x-x^{n+1})}{1-x}\\&>1-\frac{2015x}{1-x}\end{aligned}$$

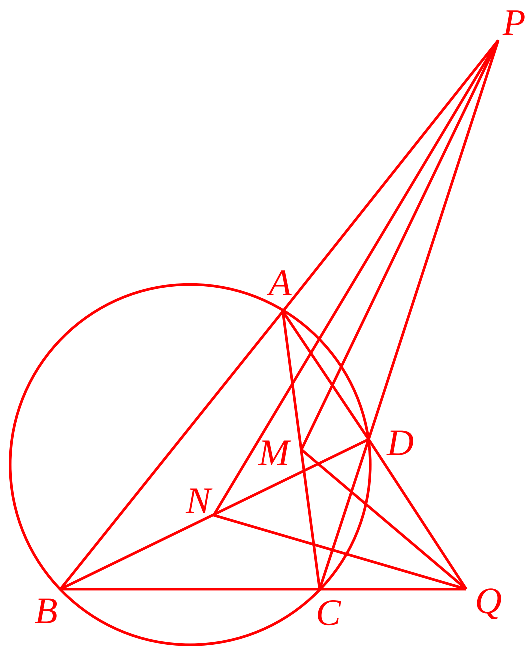
可知對於變數x來說，$1-\frac{2015x}{1-x}$是一個遞減的函數，且在$x=\frac{1}{2016}$時的取值恰為 0。故由當$0<x\leq\frac{1}{2016}$時，$|P(x)|>0$可以推知$P(x)$的每一個正根都大於$\frac{1}{2016}$。

【評分標準】

- 僅作出常數項為負值的情況，$\frac{2}{7}$
- 僅討論根為有理數的情況，$\frac{2}{7}$

4. 延長一個內接於圓的四邊形之兩雙對邊，令它們分別交於點 P、Q。若此四邊形的兩對角線之中點分別為點 M、N，請證明 $\angle PMQ+\angle PNQ=180°$。（7 分）

【參考解法 1】



令 $ABCD$ 為圓內接四邊形，且點 M、N 分別為 AC、BD 的中點，而 BA 與 CD 的延長線交於點 P、BC 與 AD 的延長線交於點 Q，如圖所示。

可知 $\angle PCA=\angle PBD$，故三角形 PCA 與 PBD 為相似三角形，即知 $\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{CA}{BD}=\dfrac{MA}{ND}$；

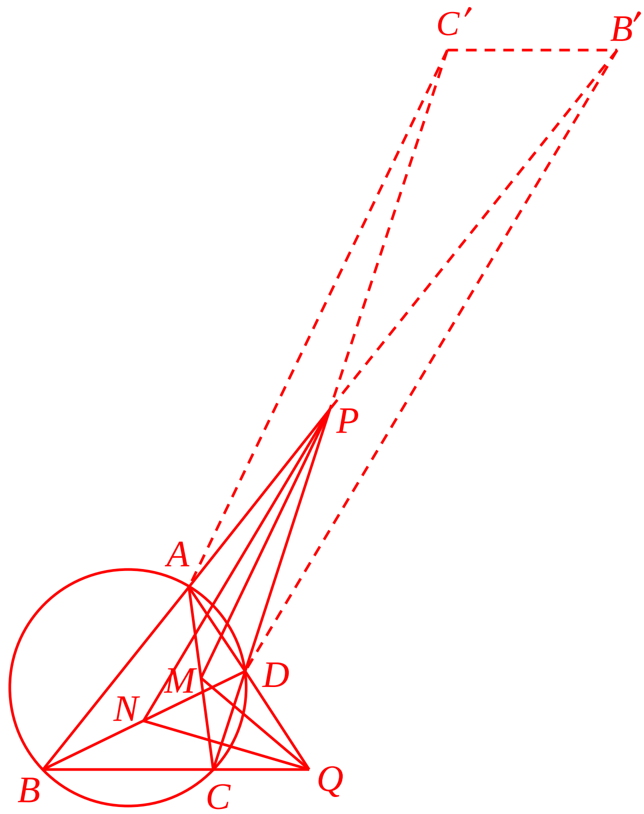
再因 $\angle PAM=\angle PDN$，故三角形 PAM 與 PDN 為相似三角形，即知 $\angle PMA=\angle PND$。同樣地，也可推出 $\angle QMC=\angle QND$，故有

$$\begin{aligned}\angle PMQ+\angle PNQ&=\angle PMQ+\angle PND+\angle QND\\&=\angle PMQ+\angle PMA+\angle QMC\\&=180°\end{aligned}$$

【評分標準】

- 證明三角形 PCA 與 PBD 為相似三角形，$\dfrac{2}{7}$
- 證明 $\angle PMA=\angle PND$，$\dfrac{2}{7}$
- 同理可證出 $\angle QMC=\angle QND$，$\dfrac{1}{7}$
- 計算 $\angle PMQ+\angle PNQ$ 之值，$\dfrac{2}{7}$

【參考解法 2 邱禹埕證法】



延長 BP 至 B' 使得 $BP=PB'$、延長 CP 至 C' 使得 $CP=PC'$，連接 AC'、$C'B'$、$B'D$。則知

$$AP\times PB'=AP\times BP=DP\times CP=DP\times PC'$$

因此可推得 A、D、B'、C' 四點共圓；

再由 $BB'=2BP$、$BD=2BN$ 可知 $PN\,//\,B'D$，

即知 $\angle DB'B=\angle NPB$；

同樣地，也可推得 $\angle AC'C=\angle MPC$，故有

$\angle NPB=\angle DB'B=\angle AC'C=\angle MPC$；

同樣地，也可推得 $\angle NQB=\angle MQA$，故有

$$\begin{aligned}&\angle PNQ+\angle PMQ\\&=\angle PBN+\angle NPB+\angle QBN+\angle NQB+\angle PMQ\\&=\angle ACP+\angle MPC+\angle DAC+\angle MQA+\angle PMQ\\&=\angle AMP+\angle QMC+\angle PMQ\\&=180°\end{aligned}$$

5. 在黑板上寫下幾個相異實數。小平想要造出一個表達式用以恰好顯示這幾個數值。他可以在表達式中任意使用實數、括號以及運算符號＋、－、×，他同時也可以使用特殊符號±。當在計算表達式的值時，在遇到所有±時，都必須計算＋與－號的所有組合情形。例如，表達式5 ± 1所得出的值為$\{4, 6\}$而$(2\pm0.5)\pm0.5$所得出的值為$\{1, 2, 3\}$。請問小平能否作出一個表達式，

(a) 如果黑板上的數為 1、2、4？（2 分）

(b) 如果黑板上的數為任意 100 個的相異實數？（6 分）

【參考解法】

(a) 以下為滿足題意的表達式：

i. $(1.5\pm0.5)\times(1.5\pm0.5)$：皆取＋號時，可得 4；皆取－號時，可得 1；取一個＋號與一個－號時，可得 2；

ii. $(1\pm0.5)\times(1\pm1)+1$：皆取＋號時，可得 4；(1 ± 1)取－號時，可得 1；(1 ± 1)取＋號與(1 ± 0.5)取－號時，可得 2；

iii. $(0.5\pm1.5)\times(0.5\pm0.5)+2$：皆取＋號時，可得 4；$(0.5\pm0.5)$取－號時，可得 2；$(0.5\pm0.5)$取＋號與$(0.5\pm1.5)$取－號時，可得 1；

iv. $2\times(\frac{3\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{4})\times(\frac{3\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{4})$：皆取＋號時，可得 4；皆取－號時，可得 1；取一個＋號與一個－號時，可得 2。

(b) 對於有 n 個相異實數時，對 n 利用數學歸納法驗證。可知$n=1$時恆成立。假設此結果在$n\geq1$時成立，則考慮a_1、a_2、⋯、a_{n+1}這$n+1$個實數。由假設可得知當僅有a_1、a_2、⋯、a_n這 n 個實數時，表達式$E(a_1, a_2, \cdots, a_n)$可恰表達出這 n 個實數。現觀察表達式$a_{n+1}+(0.5\pm0.5)\times E(a_1-a_{n+1}, a_2-a_{n+1}, \cdots, a_n-a_{n+1})$，若取－號時，此表達式之值為$a_{n+1}$；若取＋號時，則恰可表達出$a_1$、$a_2$、⋯、$a_n$這 n 個實數。故由數學歸納法知對所有的 n 都成立，即任意 100 個的相異實數也成立。

【評分標準】

(a) 若表達式的值有 1、2、4 以外的取值，$\frac{0}{7}$

(b) 僅構造出正確的表達式而未驗證恰可表達所有的數，$\frac{4}{7}$

6. 小貝有一個直徑為 20 cm 的球。利用一把長刀，小貝進行了兩兩互相垂直的三次切割，每次都切 h cm 深，每次都在切面上產生了一條高度為 h cm 的圓弧。請問是否必定會將此圓切為二片或二片以上，如果

(a) $h=17$ cm？（6 分）

(b) $h=18$ cm？（6 分）

【參考解法】

若能找出使(b)無法被切為二片或二片以上的一種切法，則可判斷此切法也可使(a) 無法被切為二片或二片以上。

可假設這一個球面之方程為 $x^2+y^2+z^2=100$，並假設第一刀在平面 $z=0$ 上，且切出一個半徑為 10 的圓與以兩端點座標分別為 $(-7\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$、$(-\sqrt{2},-7\sqrt{2},0)$ 的弦所圍成的區域。此時可發現從點 $(5\sqrt{2},5\sqrt{2},0)$ 至這條弦的距離即為 18。接著第二刀在平面 $y=-4$ 上，且切出一個半徑為 $2\sqrt{21}$ 的圓與以兩端點座標分別為 $(\sqrt{72\sqrt{21}-324},-4,18-2\sqrt{21})$、$(-\sqrt{72\sqrt{21}-324},-4,18-2\sqrt{21})$ 的弦所圍成的區域。此時可發現從點 $(-4,-4,-2\sqrt{21})$ 至這條弦的距離即為 18。接著第三刀在平面 $x=-4$ 上，且切出一個半徑為 $2\sqrt{21}$ 的圓與以兩端點座標分別為 $(-4,\sqrt{72\sqrt{21}-324},2\sqrt{21}-18)$、$(-4,-\sqrt{72\sqrt{21}-324},2\sqrt{21}-18)$ 的弦所圍成的區域。此時可發現從點 $(-4,-4,-2\sqrt{21})$ 至這條弦的距離即為 18。而當最後兩刀切完後觀察相交處，可發現都還有一小段連接著，因此球體上所切出的優弧並未相交，即球面上仍有連通的部分，故此球並未被切為二片或二片以上。

【評分標準】

(a) 給出不會被切成二片或二片以上的切法，$\frac{5}{7}$

說明此切法無法使球被切為二片或二片以上，$\frac{2}{7}$

- 僅回答否或切法不可行，$\frac{0}{7}$
- 僅說明切法可能存在，但未給出實際切法，$\frac{3}{7}$

7. 有 n 位身高都互不相同的小朋友排成一列。每次操作都先將此列的小朋友分為最少的群體，使得每個群體內的小朋友之身高都是漸升的順序，這些群體可能只有一位小朋友。接下來將每個群體的順序倒轉，使它們的身高變為漸減的。請證明經過 $n-1$ 次的操作後，保證可將所有小朋友排成身高漸減的順序。(12 分)

【參考解法】

首先，需先強調整個重排過程中如何操作並不是我們所關注的，這是因為實際上操作的過程與開始時的排列順序有關，而所需驗證的是重排過程至多需操作 $n-1$ 次即可。現不妨將這些小朋友由高至矮依序從 1 開始編號至 n，則最後所要求的排法為 $\{1，2，3，\cdots，n\}$。對於任意的 k，其中 $1\le k\le n$，接著將驗證在至多經過 $n-1$ 次操作即可將 k 號小朋友排到最後所要求的排法中第 k 個位置。而若上述對於所有的 k 都是正確的，則最後所要求的排法一定可以在至多經過操作 $n-1$ 次後排出。對於 k 號小朋友來說，將所有比 k 號小朋友矮的小朋友都標記 S、所有比 k 號小朋友高的小朋友都標記 T，且 k 號小朋友也標記 T，則開始時的排列順序即為 k 個 T 與 $n-k$ 個 S 的某一種排列順序，接著即相當於驗證至多經過 $n-1$ 次操作後，所有的 T 都會排在前 k 個位置上。例如若只有六個小朋友，且初始的排列為 $\{621534\}$，則可得如下表所示的操作與標記法，其中每一組括號代表一個群體，但僅由一位小朋友所組成的群體之括號省略：

排列順序	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
(621)(53)4 各群體排序數	SSTSSS 2, 0, 0	STTSSS 2, 0, 0	STTSTS 3, 2, 0	STTSTT 4, 3, 0	STTTTT 5, 0, 0	TTTTTT 0, 0, 0
12(63)(54) 各群體排序數	TSSSSS 0, 0, 0, 0	TTSSSS 0, 0, 0, 0	TTSTSS 0, 0, 1, 0	TTSTST 0, 0, 2, 2	TTSTTT 0, 0, 3, 0	
123(64)5 各群體排序數			TTTSSS 0, 0, 0, 0, 0	TTTSTS 0, 0, 0, 1, 0	TTTSTT 0, 0, 0, 2, 0	
1234(65) 各群體排序數				TTTTSS 0, 0, 0, 0, 0	TTTTST 0, 0, 0, 0, 1	
123456 各群體排序數					TTTTTS 0, 0, 0, 0, 0, 0	

若有一個 T 緊接在 S 之後，則稱為一組 ST 對，且這樣的 ST 對必包含在同一個群體中。對於每一組群體，可定義「排序數」如下：若此群體不包含任何的 ST 對，則此群體的排序數為 0，否則必包含一組 ST 對，此時將整個排列中，位於這一組 ST 對前的 S 之個數與位於這一組 ST 對後的 T 之個數的和加上 1，即為此群體的排序數。而對於每一個排列，其排序數就是所有群體的排序數之最大值。可觀察出在每一次操作中，原本 ST 對所對應的兩位小朋友的順序都會相反過來。若這一個 S 所對應的小朋友是新的群體中 ST 對中 S 所對應的小朋友，則這一組 ST 對前的 S 之個數不變而 ST 對後的 T 之個數會減少 1，換言之，每一次操作後，新的排列的排序數至少會減少 1。當排列的排序數遞減至 0 時，則達成所要的排列。因開始時共有 k 個 T 與 $n-k$ 個 S，故一個群體的排序數之最大值是當其餘的 $n-k-1$ 個 S 都在 ST 對前、其餘的 $k-1$ 個 T 都在 ST 對後，且此時的排序數之值為 $1+(n-k-1)+(k-1)=n-1$，故知最多操作 $n-1$ 次排序數會遞減至 0。

【評分標準】

- 僅觀察出在經過 $n-1$ 次的操作後，最高的必在首位，$\frac{1}{7}$
- 僅觀察出在經過 $n-1$ 次的操作後，最矮的必在末位，$\frac{1}{7}$

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》