International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2015 秋季賽　高中組　初級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 令 p 為一質數，請找出所有的正整數 n，使得 pn 是 $p+n$ 的倍數。(三分)

【參考解法】

假設 $pn=k(p+n)$，其中 k 為正整數。此時有

$$p^2=p^2+pn-pn=p^2+pn-kp=kn=(p+n)(p-k)\text{。}$$

因 $p+n>p$ 且 p 為一質數，故 $p+n=p^2$，即 $n=p(p-1)$。

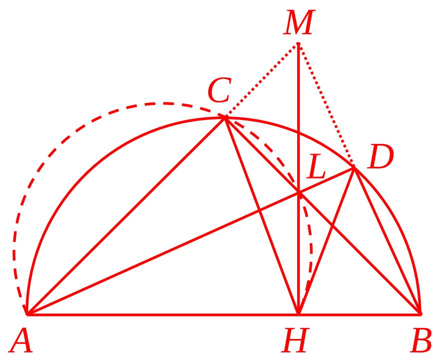
【評分標準】

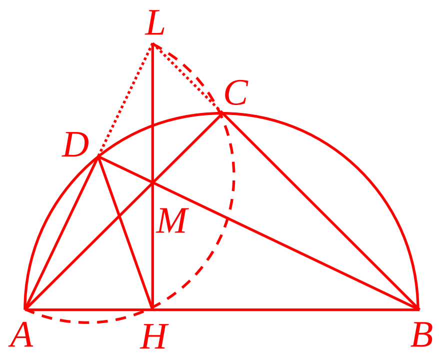
- 若分為奇質數與偶質數討論，且僅求出 $p=2$ 時 n 的取值，$\frac{1}{7}$
- 若僅列出 $p=2$、3、5、7、…時 n 的取值而無其它說明，$\frac{1}{7}$
- 若直接取 $n=p^2-p$ 並證明此時 pn 是 $p+n$ 的倍數而無其它說明，$\frac{1}{7}$
- 利用 $pn=k(p+n)$ 而得 $n=\dfrac{pk}{p-k}$，僅討論 $p-k$ 為 p 的因數而無其它說明，$\frac{1}{7}$

2. 點 C 是以線段 AB 為直徑的半圓弧之中點，此半圓弧上另有一點 D。已知 $\angle ADB$ 的平分線交直線 AB 於點 K，請證明三角形 ACK 的外心位於直線 AD 上。(四分)

【參考解法】

首先考慮點 D 落在劣弧 BC 上，如下左圖所示。令直線 AD 與 BC 交於點 L、直線 AC 與 BD 交於點 M，且直線 LM 與 AB 相交於點 H。由 AB 為直徑可知 AD 與 BM 垂直、BC 與 AM 垂直，因此點 L 是三角形 AMB 的垂心，故 MH 與 AB 垂直，此時即可判斷出點 C、H 落在以 AL 為直徑的圓上。再因 $\angle BDL=90°=\angle LHB$，故點 B、D、L、H 四點共圓，即可得知 $\angle DBL=\angle DHL$，因此 $\angle BDH=180°-\angle LHB-(\angle DBL+\angle DHB)=180°-45°-90°=45°$，所以 DH 平分 $\angle ADB$，即點 H 與點 K 是同一點，換言之，三角形 ACK 的外心位於直線 AD 上。





若點 D 落在劣弧 AC 上，則依相同方式可得上右圖，且同樣作法仍可得到相同結論。

【評分標準】

- 若利用解析證法，將圖形放在座標平面上證出，但計算點座標、直線方程時計算有誤或不完整，至多 $\frac{6}{7}$；若未證出，不與給分。
- 利用特例證明，$\frac{1}{7}$

3. 三個人玩「剪刀、石頭、布」猜拳遊戲，每一輪三人都同時出拳。石頭贏剪刀、剪刀贏布、布贏石頭。在同一輪中，若恰出現有二種不同的拳，意即恰有二人出同一種拳、另一人出其它的拳，此時贏的某一人得一分或某二人各得一分，其它的情況則為和局沒有人可得分。經玩過數輪後，三種不同的拳所出現的總次數都相同，請證明此時得分總和為 3 的倍數。（四分）

【參考解法 1】

假設共玩 n 輪，並對 n 利用數學歸納法證明。

對於僅有 $n=1$ 輪時，此時因三種不同的拳所出現的總次數都相同，即這一輪剪刀、石頭、布各出現一次，所以三人平手，此為和局，所以三人的總得分是 0 分，恰為 3 的倍數。

假設玩 n 輪後，若三種不同的拳所出現的總次數都相同，此時得分總和為 3 的倍數成立。

現考慮玩 $n+1$ 輪後，三種不同的拳所出現的總次數都相同的情況。可知若每一輪皆為和局使得三人得分總和為 0 分，則 $n+1$ 輪後得分總和仍為 0 分，恰為 3 的倍數。而若有任何一輪是剪刀、石頭、布各出現一次，則可忽略此輪而僅考慮其餘 n 輪的情況，再由此時其餘 n 輪三種不同的拳所出現的總次數仍相同知得分總和為 3 的倍數。因此現可僅討論各輪皆沒有剪刀、石頭、布各出現一次的情況，且至少有一輪三人的總得分為 1 分或 2 分。

若這一輪為「剪刀、石頭、石頭」，則由三種不同的拳所出現的總次數都相同可以判斷出存在另外一輪裡至少有一個布，即此輪為「布、布、布」、「布、布、石頭」、「布、布、剪刀」、「布、石頭、石頭」或者「布、剪刀、剪刀」。不論是那一種情況，都可將其中一個布與「剪刀、石頭、石頭」裡的一個石頭交換，此時分數的變化如下表所示：

原始的情況	原始三人總得分	交換後的情況	交換後三人總得分	分數變化
「布、布、布」	0	「布、布、石頭」	2	+2
「布、布、石頭」	2	「布、石頭、石頭」	1	–1
「布、布、剪刀」	1	「布、石頭、剪刀」	0	–1
「布、石頭、石頭」	1	「石頭、石頭、石頭」	0	–1
「布、剪刀、剪刀」	2	「石頭、剪刀、剪刀」	1	–1

而因在交換前，「剪刀、石頭、石頭」這一輪三人總得分為 2 分，交換後變為「剪刀、石頭、布」，即三人總得分減少 2 分，故所有輪數總得分合計減少 3 分或不變，且此時可將變為「剪刀、石頭、布」這一輪忽略而僅考慮其餘 n 輪的情況，再由此時其餘 n 輪三種不同的拳所出現的總次數仍相同知得分總和為 3 的倍數。

同樣地，若三人總得分為 1 分或 2 分的這一輪情況為「布、布、石頭」、「布、布、剪刀」、「布、石頭、石頭」、「布、剪刀、剪刀」或「石頭、剪刀、剪刀」，一樣可利用此種交換的想法而證出，此即證明了玩 $n+1$ 輪後，若三種不同的拳所出現的總次數都相同，此時得分總和為 3 的倍數成立。

【參考解法 2 劉得徵解法】

可將「剪刀、石頭、布」猜拳遊戲每一輪所有可能的情況與三人總得分的情形列表如下：

情況		三人總得分
1	「剪刀、石頭、布」	0
2	「剪刀、剪刀、剪刀」	0
3	「石頭、石頭、石頭」	0
4	「布、布、布」	0
5	「剪刀、剪刀、布」	2
6	「剪刀、布、布」	1
7	「石頭、石頭、剪刀」	2
8	「石頭、剪刀、剪刀」	1
9	「布、布、石頭」	2
10	「布、石頭、石頭」	1

現已知經過數輪後三種不同的拳所出現的總次數相同，故刪除發生情況 1 的輪後，得分總和不變，且三種不同的拳所出現的總次數仍相同；接著再刪除發生情況 2、3、4 的輪後，得分總和不變，且任二種不同的拳所出現的總次數的差必為 3 的倍數，此時觀察布出現的次數與剪刀出現的次數。因在情況 5、6、7、8、9、10 中，布出現的次數依序比剪刀出現的次數多了 -1、1、-1、-2、2、1 次，故若情況 5、6、7、8、9、10 分別發生了 a、b、c、d、e、f 輪，則布出現的次數與剪刀出現的次數的差為 $-a+b-c-2d+2e+f$，此為 3 的倍數，即 $-a+b-c-2d+2e+f\equiv 0 \pmod 3$，而總得分為

$$\begin{aligned}2a+b+2c+d+2e+f &\equiv -a+b-c-2d+2e+f\\ &\equiv 0 \pmod 3\end{aligned}$$

即總得分為 3 的倍數。

【參考解法 3 周奕寬解法】

定義「A 計分」如下：

每一輪中，每出現一次剪刀得 1 分、每出現一次石頭得 0 分、每出現一次布得 -1 分，則每一輪會出現的情況之三人總得分與 A 計分如下：

情況		三人總得分	A 計分
1	「剪刀、石頭、布」	0	0
2	「剪刀、剪刀、剪刀」	0	3
3	「石頭、石頭、石頭」	0	0
4	「布、布、布」	0	–3
5	「剪刀、剪刀、布」	2	1
6	「剪刀、布、布」	1	–1
7	「石頭、石頭、剪刀」	2	1
8	「石頭、剪刀、剪刀」	1	2
9	「布、布、石頭」	2	–2
10	「布、石頭、石頭」	1	–1

可發現每一種情況中，三人總得分與 A 計分之和都是 3 的倍數，即經過數輪後，三人總得分與 A 計分的總和也都是 3 的倍數。現已知三種不同的拳所出現的總次數都相同，故 A 計分的總和為 $1+0+(-1)=0$ 的倍數，此仍為 0，所以三人的得分總和是 3 的倍數。

【評分標準】

- 觀察出有任何一輪是剪刀、石頭、布各出現一次，則可忽略此輪的現象，$\frac{1}{7}$
- 若直接證明時，僅證出每一輪都恰有二人出相同拳時的情況而未考慮可能有三人出相同拳的情況，至多 $\frac{2}{7}$
- 僅討論不同的輪之間交換拳的方式，但未驗證滿足題意或未清楚說明全部的交換方式，至多 $\frac{4}{7}$

4. 某國有 100 個城市，任意二個城市之間都有直飛的往返航班，同一航線往返的票價相同。我希望搭飛機到其它 99 個城市旅遊，最後回到原來的城市，並且使得我行程中平均每一趟搭機的票價不大於所有航班票價的總平均。
 (a) 我是否恆可以達成目的？（二分）
 (b) 如果我只到其它 98 個城市旅遊，我是否也恆可以達成目的？（二分）

【參考解法】

(a) 不妨將我出發的城市視為一個正 99 邊形的中心、其餘 99 個城市視為此正 99 邊形的各個頂點。此時由出發的城市往其它的城市航線為通過中心與該頂點的直線，而其它 99 個城市兩兩之間的航線則為對角線與邊。由 99 為奇數可知每一條邊或對角線都恰與一條通過中心與一個頂點的直線垂直，因此可將所有的航線分成 99 組，每一組都恰有一條通過中心與一個頂點的直線及與這條直線垂直的邊、對角線。而在每一組中，所有的航線都恰經過一個城市一次，因此設計行程時，可考慮交替使用兩組的航線，而這兩組航線可選擇 99 組航線中，總價最低的兩組航線，此時平均每一趟搭機的票價不大於所有航班票價的總平均。故我恆可以達成目的。

(b) 若我原始出發的城市往其他 99 個城市票價都是 x，而其它 99 個城市彼此之間的票價都是 y，則所有航線的總票價為 $99x+C_2^{99}y$，而我所搭乘的總票價為 $2x+97y$，即題意所要求的條件為 $\dfrac{2x+97y}{99}\le\dfrac{99x+C_2^{99}y}{C_2^{100}}$，化簡後可得 $x\le y$。故知若有 $x>y$ 的情況，則我不可能達成目的。

【評分標準】

(a) ● 指出不同的路線航行方式總票價可能不同，$\frac{1}{7}$

● 指出挑選所有的路線航行方式中，總票價最低的路線，$\frac{1}{7}$

● 說明這樣的路線滿足題意，$\frac{2}{7}$

● 說明路線如何設計，$\frac{3}{7}$

● 因未限制城市是否可以重複經過，故若僅說明城市沒有重複經過時的情況，且未設計出滿足題意的路線航行，至多 $\frac{3}{7}$

(b) 用(a)所設計出的路線刪除一個城市為例而未說明其它路線也無法滿足，$\frac{2}{7}$

5. 請問是否存在一個無窮項的嚴格遞增等差數列，將它劃分為許多段，每段都有連續的項，而使得所有連續每一段內的數之總和構成一個等比數列？（五分）

【參考解法】

可將此無窮項的嚴格遞增等差數列取為正整數的集合，即將此數列取為 1、2、3、4、5、6、…，分段方式為從 $i=1$ 開始，第 i 段為前一段之後第一個數開始連續 3^{i-1} 個項，即第 1 段為 1，第 2 段為 2、3、4 這 3 個數，第 3 段為 5、6、7、8、9、10、11、12、13 這 9 個數，以此類推。

此時可知前 $i-1$ 段共有 $1+3+3^2+\cdots+3^{i-2}=\dfrac{3^{i-1}-1}{2}$ 項，即第 i 段的第一個數為 $\dfrac{3^{i-1}-1}{2}+1=\dfrac{3^{i-1}+1}{2}$ 而最後一個數為 $\dfrac{3^{i-1}+1}{2}+(3^{i-1}-1)=\dfrac{3^i-1}{2}$，所以第 i 段的中間項為 $\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{3^{i-1}+1}{2}+\dfrac{3^i-1}{2})=3^{i-1}$，故第 i 段的和為 $3^{i-1}\times3^{i-1}=3^{2(i-1)}$，即此等比數列的第 i 項為 $3^{2(i-1)}$、公比為 9。

【評分標準】● 舉出數列 1、2、3、4、5、6、…，$\frac{2}{7}$

● 說明分段方式，$\frac{2}{7}$

● 驗證分段方式滿足題意，$\frac{3}{7}$。